



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO - CAMPUS
GUARULHOS**

AUTORES

Thiago Emanuel Santos Goulart e Silva

ORIENTADORES

William Vieira

Roberto Seidi Imafuku

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS: Uma Análise a partir das ideias de Fischbein

**SÃO PAULO
2024**

RESUMO

Neste trabalho, analisamos as respostas de 2 estudantes ingressantes do Ensino Médio para um problema envolvendo semelhança de triângulos. Para fundamentação teórica, utilizamos as ideias de interação de aspectos formais, algorítmicos e intuitivos. Como objetivo de nossa análise, observamos como se dava a interação destes 3 aspectos nas resoluções dos estudantes e quais dificuldades podiam ser evidenciadas a partir destas interações. As questões respondidas pelos estudantes foram coletadas a partir de um questionário diagnóstico aplicado no início do ano de 2024. Os estudantes apresentaram dificuldades na resolução do problema de semelhança de triângulos, denotando aspectos intuitivos confusos e uma falta de interação entre os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos.

Palavras-chave: Aspecto formal, Aspecto Algorítmico, Aspecto intuitivo, Semelhança de triângulos.

INTRODUÇÃO

É quase uma unanimidade entre estudantes e educadores a dificuldade no ensino e aprendizagem de geometria nos anos iniciais e até mesmo no ensino superior.

De acordo com Bisognin e Frantz (2022), o problema no ensino de geometria é algo sistêmico, englobando problemas de currículo, apresentação do conteúdo de forma isolada, formação precária dos professores e desinteresse dos estudantes. No mesmo sentido, Soares (2009) explora em sua tese de mestrado as origens dos problemas do ensino da geometria, as causas estruturais e sistêmicas que geram estas situações e possíveis alternativas para contornar estes problemas. Ambos os trabalhos denotam uma questão séria no que tange o ensino e aprendizagem da geometria.

O tema específico da geometria que abordaremos neste trabalho, será o tema da semelhança de triângulos, pois entendemos este como fundamental, assim como evidenciam Pereira e Pereira “(...) do ponto de vista matemático, esse conceito é muito importante por se constituir em pré-requisito para o estudo de vários conteúdos geométricos, assim como a grande riqueza de conceitos que ele próprio envolve” (2016. p. 3).

Além da importância do tema de semelhanças de triângulos, existem também as dificuldades que cercam este conteúdo. Como já dito, a geometria em específico é um campo da educação matemática na qual os estudantes e professores encontram muitos impasses, algo que não é diferente no conteúdo de semelhança de triângulos. Outros autores também evidenciaram estas dificuldades e realizaram investigações e análises para tentar compreender como se davam estes problemas dentro do processo de aprendizagem.

Pereira e Pereira (2016) realizaram um trabalho que investigava o ensino e aprendizagem de semelhança de triângulos em uma turma de estudantes do ensino fundamental, por meio de um questionário avaliativo que foi aplicado para 100 estudantes. Os pesquisadores buscaram compreender as dificuldades que os estudantes apresentavam através da avaliação deles sobre o conteúdo de semelhança de triângulos. Os pesquisadores notaram que as definições e conceitos acerca da semelhança de triângulos são conteúdos que os alunos

conseguem compreender de forma razoável, apresentando dificuldades, principalmente nas aplicações destes conceitos. Os autores enfatizam que quanto mais conceitos envolvidos do tema em um problema, como por exemplo, questões que tratam de vários casos de semelhança e problemas contextualizados, maior a dificuldade para os estudantes no que tange seu entendimento. Em suas considerações finais, os autores evidenciam que os estudantes consideram a aprendizagem da semelhança de triângulos algo consideravelmente difícil. Sendo assim, este é um tema que deve ser melhor desenvolvido, principalmente em questões que tratam de sua aplicabilidade e questões que envolvem este tema, mas exigem uma relação maior entre a semelhança de triângulos e outros conteúdos.

As dificuldades a respeito da semelhança de triângulos não é observada apenas dentro do ensino básico, mas também dentro do ensino superior, como analisaram Oliveira e Chiummo (2015). Os pesquisadores aplicaram uma atividade para 45 estudantes ingressantes da graduação em matemática, os quais deveriam mobilizar seus conhecimentos de semelhança de triângulos para resolver o problema dado. Para a análise, os autores categorizarão as respostas dadas pelos estudantes em 2 conjuntos, um envolvendo as conclusões e inferências produzidas por eles e o outro conjunto tratando dos procedimentos utilizados. Para além de uma categorização, os autores apresentaram e analisaram algumas questões de forma individualizada. Eles observaram que poucos estudantes apresentam ter aprendido de forma correta o conteúdo e conseguem aplicar de forma correta as ideias de semelhança de triângulos. Por outro lado, uma boa parte dos estudantes apresentou dificuldades no que se refere ao tema, tratada pelos autores como sendo casos em que a aprendizagem não foi efetiva ou não houve aprendizagem. Por fim, os autores evocam a necessidade de mais pesquisas, que envolvam contribuições para entender como melhorar o ensino e aprendizagem deste tema.

Este artigo é motivado pelas dificuldades apresentadas por alunos ingressantes do ensino médio de uma instituição pública acerca dos conteúdos que envolvem geometria, especificamente, a semelhança de triângulos. Conseguimos observar estas dificuldades a partir da correção de um questionário diagnóstico que foi aplicado para eles logo no início de 2024. Para analisarmos as respostas destes estudantes e compreendermos suas dificuldades e entendimentos, utilizaremos as ideias de Fischbein (1994) sobre a atividade matemática e a interação de seus três principais aspectos. No que segue, apresentaremos as ideias que baseiam nossa análise.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para embasar este trabalho, utilizaremos a visão de Fischbein (1994) a respeito da matemática, considerando-a como uma atividade humana e observando o que o autor considera serem os principais aspectos inerentes a esta visão da matemática; os aspectos formais, algoritmos e intuitivos. Estes aspectos serão utilizados para analisar as respostas dos estudantes.

Fischbein (1994) trata da interação entre estes três aspectos como parte fundamental para compreender a matemática como um processo criativo e acessível. Entendendo a matemática desta forma, apresentamos ela como uma ciência construída a partir de uma atividade humana. Sendo assim, mostramos que a criação matemática é um processo, no qual os estudantes podem participar de forma ativa. Este que não é algo já estabelecido, que é reduzida apenas a axiomas, teoremas e rigorosos sistemas lógicos e sim, a um processo de tentativas, erros, acertos, contradições e aceitações, ou seja, um processo criativo e vivo (Fischbein, 1994; Souza, 2008).

Vamos tratar no decorrer desta seção, o que Fischbein e demais autores que se debruçaram sobre suas obras, tratam a respeito dos aspectos formais, algorítmicos e intuitivos da atividade matemática.

O aspecto formal trata da parte mais estrutural da matemática, como os teoremas, noções primitivas, corolários, demonstrações. A parte formal representa o núcleo da matemática, entendida como uma ciência formal e estruturada de forma rigorosa, consistente e coerente com seus preceitos (Fischbein, 1994). O autor chama a atenção sobre a questão da compreensão do pensamento proposicional e da parte mais formal e rigorosa da matemática, que não é adquirida de forma simples e imediata, exigindo assim, dos educadores um processo de ensino que trabalhe estes elementos com os educandos. É fundamental que se trabalhe os elementos formais, mesmo concebendo a matemática como uma atividade humana, pois, como reitera Souza:

(...) embora a maioria dos alunos da Educação Básica não vá necessariamente ser matemático, o que quer dizer que vai praticar a Matemática como atividade humana, as componentes formais precisam estar bem entendidas e ativas, para que seja desenvolvido um processo de raciocínio. Elas precisam ser inventadas ou aprendidas, organizadas, confrontadas e ativamente usadas pelo sujeito: entender o significado do rigor (o que não significa decorar demonstrações, mas sim preocupar-se com o rigor); desenvolver o sentimento de coerência e consistência (o que implica numa preocupação com as formas de expressão) (2008, p. 48).

Pensando dentro do campo da geometria, um exemplo do aspecto formal são as propriedades de um triângulo, como a soma de seus ângulos internos, casos de semelhança e razão de semelhança.

O aspecto algorítmico trata das questões mais voltadas para os métodos, técnicas, procedimentos e os propriamente ditos, algoritmos, os quais, são utilizados para a resolução de

problemas. Fischbein (1994) trata que, não é suficientemente capaz de resolver e entender problemas, o aluno que somente desenvolveu o aspecto algorítmico ou, aquele que apenas compreendeu os aspectos formais da matemática. Para o autor, os dois aspectos devem ser desenvolvidos de forma conjunta, visto que a atividade matemática necessita que o indivíduo tenha habilidade em realizar cálculos e operações, o que só pode ser estimulado a partir da prática e do treino destas funções. Porém, evidencia Fischbein (1994), não é suficiente para o desenvolvimento do pensamento matemático. Para o autor, a “profunda simbiose entre significado e prática é condição básica para a produção de um pensamento matemático eficiente” (Fischbein, 1994. p. 232).

O algoritmo da regra de 3 é muitas vezes utilizada para calcular a razão de semelhança de triângulos, ou o valor de um determinado segmento do através dos casos de semelhança por lados homólogos. Casos como estes, são exemplos dos aspectos algorítmicos presentes dentro da atividade matemática.

Os aspectos intuitivos fazem referência aos processos cognitivos, como um primeiro pensamento intuitivo sobre um problema, a respeito de uma solução, ou até de um conceito. De forma geral, o aspecto cognitivo trata a respeito dos primeiros pensamentos, das ideias que surgem sem necessariamente partirem de algum procedimento ou conceito formalmente estabelecido (Fischbein, 1994). Este aspecto, normalmente é sempre caracterizado pela aparente autoevidência de uma afirmação, como por exemplo, um estudante que visualiza dois triângulos e diz que estes são semelhantes, apenas observando-os, conjecturando a partir da intuição. O autor menciona que este aspecto, pode exercer um papel de facilitador da produção do pensamento, quando bem estabelecido, mas tende a produzir maiores obstáculos epistemológicos e dificuldades nos processos de aprendizagem, resolução e criação (Fischbein, 1994).

A intuição dentro e fora do ambiente educacional é um conceito abstrato e que vem sendo discutido por diversos pesquisadores e teóricos, sendo assim, tendo várias perspectivas e definições acerca deste conceito (Vieira, 2016; Sousa; Alves; Souza 2022). Defende Fischbein (1994), que a característica principal acerca da intuição, é seu imediatismo, sendo assim, ela é a parte primária do pensamento, responsável pela produção das primeiras conjecturas acerca de determinado problema ou conceito.

Porém, como tratam Sousa, Alves e Souza (2022, p. 436) “a intuição é geralmente vista como um fenômeno primário que pode ser descrito, mas que não é redutível a componentes mais elementares”. Ou seja, o aspecto intuitivo se mostra como um pensamento autoevidente,

que dificilmente poder ser explicado e justificado, já que parte de uma cognição inicial a respeito de um dado problema (Sousa; Alves; Souza 2022).

Fischbein (1994) sustenta que a relação entre estes três aspectos, não só é complexa, como a compreensão delas é parte fundamenta do entendimento dos processos de pensamento e compreensão dos educandos. Sendo assim, é necessário para que nos atentemos para estes aspectos, quando analisamos as questões dos estudantes. O autor também marca a importância da relação entre a psicologia e as experiencias didáticas.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

No começo de 2024, os autores deste trabalho aplicaram um questionário diagnóstico para 80 estudantes de uma instituição pública federal do estado de São Paulo. O questionário em questão, possuía 11 questões com algumas sendo de múltipla escolha e outras questões dissertativas. O objetivo principal do questionário era observar quais conteúdos da matemática básica os estudantes tinham maiores dificuldades. Dentre os temas abordados dentro do questionário, tinham questões que envolviam o teorema de Pitágoras, semelhança de triângulos, cálculo de áreas, resolução de equações, análise gráfica, probabilidade e propriedades dos triângulos. Na maioria das questões, havia o pedido para que os estudantes justificassem suas respostas, para que assim, conseguíssemos observar e analisar suas justificativas e compreender seus erros, acertos e confusões.

A aplicação do questionário ocorreu no horário regular das aulas em conjunto com o professor regente das turmas em questão. Devido o objetivo já citado, não houve aviso prévio para os estudantes sobre a aplicação do questionário, visando-os apenas utilizarem os conhecimentos previamente adquiridos ao longo de suas vidas estudantis pregressas. A duração da aplicação do questionário foi a mesma das aulas regulares (duas aulas de 50 minutos cada).

Antes da aplicação dos questionários, foi passado para os estudantes Termos de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), para que seus respectivos responsáveis lessem e, porventura assinassem. Em seguida explicamos para os estudantes o intuito do questionário, o que faríamos com os materiais coletados e o objetivo das futuras pesquisas (este trabalho), entregando também o Termo de Assentimento de Participação na pesquisa. Os estudantes que tiveram suas respostas analisadas neste trabalho, serão tratados por pseudônimos, preservando assim suas identidades.

Para este artigo, iremos analisar as respostas dadas por dois estudantes para a questão que tratava sobre semelhança de triângulos (questão 9). As questões que envolviam problemas de geometria, foram as que mais tiveram respostas incorretas ou incompletas. Refletindo sobre

isso, escolhemos uma questão deste tema para realizar a nossa análise. Para este trabalho, buscamos observar como os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos interagem dentro das respostas dos dois estudantes, visando compreender as dificuldades apresentadas por eles.

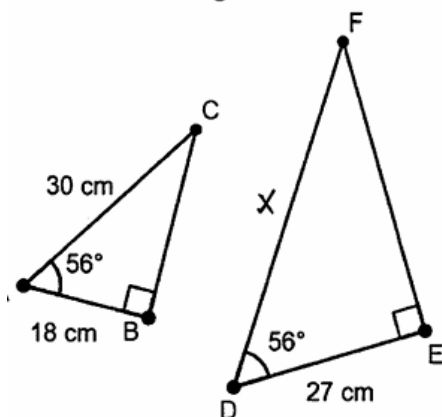
No que se segue, trataremos da análise das respostas de João e Luíz, pseudônimos que serão utilizados para se referir aos dois estudantes. No mais, vamos observar a interação entre os 3 aspectos evidenciados por Fischbein ou a não interação entre eles, analisando a partir destes conceitos as dificuldades e possíveis origens dos erros cometidos pelos estudantes.

RESULTADOS E DISCUSSÃO.

Nesta seção, vamos apresentar nossas expectativas acerca das resoluções dos estudantes e a análise de suas respostas, buscando observar a interação de aspectos formais, algorítmicos e intuitivos (Fischbein, 1994).

A questão 9 do questionário exigia dos estudantes uma reflexão e resgate a respeito dos casos de semelhanças de triângulos e das razões de semelhança. No item “a”, era necessário que o estudante observasse os triângulos e verificasse se estes eram semelhantes. Em suas justificativas, esperávamos que, ao observarem os ângulos internos dos dois triângulos, percebessem o caso de semelhança de dois ângulos ordenadamente congruentes.

Figura 1 – questão 9 do questionário
Considere os triângulos ABC e DEF a seguir.



a) Podemos afirmar que eles são semelhantes? Por quê?

b) Determine a medida do lado DF no triângulo DEF.

Fonte – Dados da pesquisa

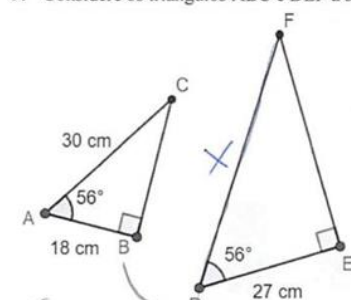
No caso do item “b”, o participante deveria utilizar a razão de semelhança entre lados homólogos para calcular o valor da medida de $\overline{DF}$, sendo assim, ele precisaria realizar o cálculo

de $\frac{30}{x} = \frac{18}{27}$. Neste problema, os alunos deveriam chegar ao valor de 45cm para o segmento $\overline{DF}$ e perceber que a razão de semelhança de $\triangle ABC$ para $\triangle DEF$ seria de $\frac{3}{2}$. Outra forma de se chegar ao resultado, seria calcular a razão de semelhança do triângulo maior, para o menor, obtendo $\frac{2}{3}$.

Luíz (Figura 2) infere corretamente sobre a semelhança dos triângulos, dizendo que os dois triângulos são semelhantes e justificando esta conjectura a partir dos ângulos internos do triângulo. Em sua resposta para a questão “a”, o estudante aparentemente justifica a questão pelo caso de semelhança AA (ângulo, ângulo), visto que ele reconhece os ângulos congruentes, porém, por utilizar a palavra ângulo no singular, não é possível garantir essa afirmação. Na questão “b” ele demonstra não conhecer os aspectos formais e algorítmicos referente as proporções de lados homólogos em triângulos semelhantes, visto que ele somou chegou na $m(\overline{DF})$, somando 9cm a $m(\overline{AB})$, realizando uma inferência incorreta, como pode ser visto na figura 2.

Figura 2 – resposta de Luíz

9. Considere os triângulos ABC e DEF a seguir.



a) Podemos afirmar que eles são semelhantes? Por quê?

Sim, porque tem o mesmo ângulo

b) Determine a medida do lado DF no triângulo DEF.

39 cm

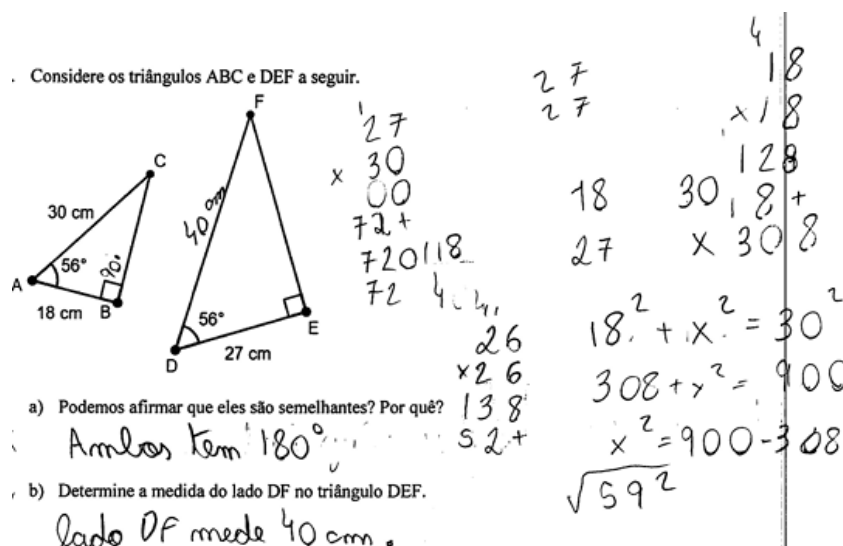
Fonte – dados da pesquisa

A ideia utilizada por Luíz de que, se $m(\overline{DE})$ é $18 + 9$, logo $m(\overline{DF}) = 30 + 9$, surge a partir de um aspecto intuitivo, visto que ele percebe esta soma em um dos lados e cria uma relação aditiva entre os lados homólogos $\overline{AC}$ e $\overline{DF}$. Porém, esta intuição não está baseada em ideias formais, gerando assim uma inferência incorreta para o problema.

João também apresenta algumas dificuldades e inconsistências em sua resolução (Figura 3). No item “a” ele trata da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o que é

verdadeiro, porém não tem a ver com o que o enunciado pedia, evidenciando uma confusão com os aspectos formais das propriedades dos triângulos necessárias para resolução da questão.

Figura 3 – resposta de João



Fonte – dados da pesquisa

Em sua resposta, João acaba realizando diversas contas para tentar achar o valor do segmento $\overline{DF}$, apesar de nenhuma destas apresentar os aspectos necessários para a resolução do problema. Semelhante a resposta para o item “a”, ele apresenta um aspecto formal correto a respeito do uso do teorema de Pitágoras para achar um dos lados do triângulo $\triangle ABC$, embora este aspecto não tenha relação com a resolução do problema. A confusão referente a quais aspectos formais utilizar para resolver o problema, estão diretamente ligados a um aspecto intuitivo confuso, o que acaba por gerar problemas e resultados incorretos na hora da resolução do problema. (Fischbein, 1994).

No item “b”, o estudante determina como medida do segmento $\overline{DF}$ o valor de 40cm, porém, em suas justificativas não há indícios de onde ele tirou este valor, possivelmente deve ter apagado ou colocado um valor que ele achou que caberia como solução para o problema.

João demonstra ter diversas dificuldades em relação ao conteúdo de semelhança de triângulos, o que gera diversos problemas na hora de resolver uma questão que envolvia este tema. Por não ter os aspectos formais necessários para se basear, tanto os aspectos algorítmicos quanto intuitivos acabam sendo prejudicados, pois todas estas relações devem interagir de forma a complementar umas às outras dentro da atividade matemática (Fischbein, 1994).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

De forma geral, ambos os estudantes denotaram diversas dificuldades no que tange os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos referentes ao conteúdo de semelhança de triângulos. Nenhum dos dois conseguiu chegar à medida correta do segmento, evidenciando um desconhecimento acerca dos conceitos de semelhança de triângulos e razões de semelhança. Analogamente ao que apontaram Oliveira e Chiummo (2015) e Pereira e Pereira (2016), os estudantes têm muita dificuldade em relacionar as ideias e propriedades da semelhança de triângulos e a aplicação destas ideias em um problema, como buscamos evidenciar em nossas análises.

Concordamos com Fischbein (1994), quando este diz que normalmente a produção de uma inferência incorreta está ligada ao aspecto intuitivo baseado em ideias incorretas, primitivas ou limitadas, inviabilizando a interação entre os aspectos formais e algoritmos. É possível observar esta relação confusa na resposta de Luíz, que confunde a ideia de razões com uma relação aditiva, se baseando em sua intuição e não nos aspectos formais necessários para a resolução daquele problema. Por outro lado, João apresenta diversas confusões a respeito das ideias e propriedades deste tema da geometria, porém, apresenta ter conhecimentos formais acerca de outros temas, como o teorema de Pitágoras e a soma dos ângulos internos de um triângulo. Como pode-se notar, suas respostas também surgem a partir de aspectos intuitivos que não tem os aspectos formais bem fundamentados, por isso ele acaba por realizar diversos procedimentos algorítmicos que em nada auxiliam na resolução do problema em questão.

Por meio da análise das respostas, constatamos a necessidade de se trabalhar a interação entre os 3 aspectos, de forma com que eles não criem interações conflituosas e sim, interações harmônicas que auxiliem no desenvolvimento e aprendizado da Matemática.

Manifestamos nosso desejo de que este trabalho possa gerar reflexões em outros pesquisadores na realização de investigações acerca das dificuldades no ensino e aprendizagem da geometria, especialmente no que se refere a semelhança de triângulos e suas relações. Tema este fundamental para o desenvolvimento do pensamento matemática e base para outros conhecimentos da geometria plana.

AGRADECIMENTOS

Ao Instituto Federal de São Paulo – IFSP campus Guarulhos pela bolsa de extensão concedida.

REFERÊNCIAS.

FISCHBEIN, Efraim. The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity. In: BIEHLER, R. et al. (Org.). **Didactics of mathematics as a scientific discipline**. Dordrecht, Holanda: Kluwer, 1993. P. 231-240.

FRANTZ, D. de S. F. S; BISOGNIN, V.. Ensino da Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental: um problema sistêmico. **Revista Educar Mais**, [S.L.], v. 6, p. 28-45, 3 jan. 2022. Instituto Federal de Educacao, Ciencia e Tecnologia Sul-Rio-Grandense. <http://dx.doi.org/10.15536/reducarmais.6.2022.2648>.

OLIVEIRA, E. C.; CHIUMMO, A. Análise da aprendizagem de semelhança de triângulos por alunos de graduação em matemática. **VIDYA**, Santa Maria (RS, Brasil), v. 35, n. 2, p. 18, 2015. Disponível em: <https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/597>. Acesso em: 24 set. 2024.

PEREIRA, S. R. F.; PEREIRA, M. F. F.P. O ensino de semelhança de triângulos na opinião de alunos. In: **ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, 12, 2016, São Paulo. Anais eletrônicos da ENEM – Encontro nacional de educação matemática. Disponível em: https://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/7486_3464_ID.pdf

SOARES, L. H. **Aprendizagem significativa na educação matemática: uma proposta para a aprendizagem de geometria básica**. 2009. 141 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2009.

SOUSA, Renata Teófilo de; ALVES, Francisco Régis Vieira; SOUZA, Maria José Araújo. Análise sobre a intuição em Matemática a partir das obras de Henri Poincaré e Efraim Fischbein. **Revista Científico - Educacional de La Provincia Granma.**, Granma, v. 18, n. 2, p. 427-451, 2022. Continuo. Disponível em: <https://portal.amelica.org/ameli/journal/440/4402900032/4402900032.pdf>

SOUZA, V. H. G. **O uso de vários registros na resolução de inequações: Uma abordagem funcional gráfica**. 2008. 307 f. Tese (Doutorado Em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo Puc-Sp.

VIEIRA, W. **Do Cálculo à Análise Real: um diagnóstico dos processos de ensino e de aprendizagem de sequências numéricas**. 2016. 452f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu, Universidade Anhanguera de São Paulo.